Descrizione delle basi teoriche e degli algoritmi

1) Ripartizione delle azioni orizzontali per una struttura multipiano.

Ipotesi di base :

- pilastri e pareti incastrati alla base
- piani rigidi
- si trascura la rigidezza flessionale delle travi ai piani
- azioni orizzontali esterne concentrate alla quota dei piani.

Gli spostamenti di ogni piano (i) della struttura sono determinati da 3 parametri di spostamento :

assoluto : $u(i), v(i), \varphi(i)$ — 2 spostamenti (rispetto gli assi principali x,y) e la rotazione rispetto l'asse verticale di riferimento (asse z)

oppure relativo :

$$\varepsilon(i) = u(i) - u(i-1)$$
$$\eta(i) = v(i) - v(i-1)$$
$$\theta(i) = \varphi(i) - \varphi(i-1)$$

Le risultanti delle azioni esterne (taglianti e torcenti di piano) sono invece la somma delle sollecitazioni tra il generico piano i e l'ultimo piano n :

$$Tx(i) = \Sigma\, X(j=i \div n)$$
$$Ty(i) = \Sigma\, Y(j=i \div n)$$
$$\mathbf{M(i)} = \Sigma\, M(j=i \div n)$$

Vale quindi la relazione matriciale che relaziona gli spostamenti relativi con le sollecitazioni esterne mediante la matrice di rigidezza globale della struttura :

$$K\, s = F$$

con : K = matrice di rigidezza globale della struttura
s = vettore degli spostamenti relativi tra i piani (traslazioni x,y e rotazione)
F = vettore dei taglianti e torcenti di piano

La notazione rappresenta un sistema di 3n equazioni in 3n incognite costituite dalle componenti di spostamento relativo.

L'algoritmo di calcolo prevede quindi i seguenti passi :

1) determinazione delle matrici di rigidezza traslazione degli elementi che compongono la struttura.
2) costruzione della matrice di rigidezza globale della struttura
3) soluzione del sistema (K s = F) e determinazione delle componenti di spostamento relative (s) dei piani (ε,η,φ)
4) calcolo degli spostamenti relativi ai piani dei singoli elementi (ε',η') in dir. X e Y, secondo le relazioni di congruenza con gli spostamenti dei piani
$$\varepsilon' = \varepsilon - y\,\varphi$$
$$\eta' = \eta + x\,\varphi$$
5) calcolo delle sollecitazioni negli elementi della struttura utilizzando le relazioni di rigidezza di ogni elemento :
$$Tx = Kx\,\varepsilon'$$
$$Ty = Ky\,\eta'$$

con : Kx,Ky matrici di rigidezza del singolo elemento in dir. x e y
ε, η parametri di spostamento

La procedura è utilizzata nell'Analisi Statica e nella determinazione delle sollecitazioni dei singoli Modi nell'Analisi Modale.

1.1) <u>Determinazione della matrice di rigidezza traslazionale degli elementi</u>

E' considerata la deformabilità tagliante dei setti (caratterizzata dal parametro adimensionale χ e dal Modulo Elastico Tangenziale G).

Per un generico setto compreso tra il nodo i e il nodo j
definiti :

$\varphi(i)$ $\varphi(j)$: rotazioni nodali
ξ : spostamento nodale
h : altezza di interpiano

le rotazioni di estremità si possono esprimere :

$$\varphi(i) = (Mi\ h)/(3EJ) - (Mj\ h)/(6EJ) + \chi/(GA) \times (Mi+Mj)/h - \xi/h$$

$$\varphi(j) = (Mj\ h)/(3EJ) - (Mi\ h)/(6EJ) + \chi/(GA) \times (Mi+Mj)/h - \xi/h$$

risolvendo si ottiene l'espressione dei Momenti di estremità :

$$Mi = 4\ EJ/h\ (1+O/4)(1+O)\ \varphi(i) + 2\ EJ/h\ (1-O/2)/(1+O)\ \varphi(j) + 6EJ/h^2\ 1/(1+O)\ \xi$$

$$Mj = 2\ EJ/h\ (1-O/2)(1+O)\ \varphi(i) + 4\ EJ/h\ (1+O/4)/(1+O)\ \varphi(j) + 6EJ/h^2\ 1/(1+O)\ \xi$$

con : $O = 12\ \chi\ EJ / (GAh^2)$ fattore adimensionale di taglio

tenendo conto che il taglio nel tronco di setto è dato da :

$$T = (Mi+Mj)/h$$

si determina infine la relazione :

$$T = 6\ EJ/h^2\ 1/(1+O)\ (\varphi(i) + \varphi(j) + 2\ \xi/\eta)$$

La soluzione di un sistema costituito dalle equazioni di equilibrio alla rotazione di tutti i nodi per ogni spostamento unitario di piano consente la costruzione delle matrici di rigidezza traslazionale degli elementi della struttura.

1.2) Costruzione della matrice di Rigidezza globale e Calcolo degli Spostamenti

Noti che siano le sollecitazioni F (tagli/momenti) di piano (derivanti da azione sismica o azione vento) è possibile determinare gli spostamenti di piano relativi dalla relazione matriciale :

$$K\,s = F$$

con : K = matrice di rigidezza globale della struttura
s = matrice degli spostamenti
F = matrice delle sollecitazioni di piano

che rappresenta un sistema di 3 n equazioni in 3n incognite (n = numero di piani)

in cui :

$$K = \begin{bmatrix} Kx & 0 & Kxo \\ 0 & Ky & Kyo \\ Kxo & Kyo & Ko \end{bmatrix}$$

$Kx = \Sigma\, kxi$	matrice traslazionale globale in dir. X
$Ky = \Sigma\, kyi$	matrice traslazionale globale in dir. Y
$Ko = \Sigma\,(kxi\, yi^2) + \Sigma\,(kyi\, xi^2)$	matrice rotazionale globale
$Kxo = \Sigma\, kxi\, yi$	
$Kyo = \Sigma\, kyi\, xi$	

(kxi), (kyi) = matrici di rigidezza traslazionale dell'elemento (i) in dir. X e Y
(xi) , (yi) = posizione dell'elemento (i)

$$s = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \theta \end{bmatrix}$$

ξ = spostamenti relativi degli (n) piani in dir. X
η = spostamenti relativi degli (n) piani in dir. Y
θ = rotazioni relative degli (n) piani

$$F = \begin{bmatrix} Tx \\ Ty \\ Mo \end{bmatrix}$$

Tx = taglianti degli (n) piani in dir. X
Ty = taglianti degli (n) piani in dir. Y
Mo = momenti torcenti degli (n) piani

2) **Analisi Sismica Modale**

Nell'analisi dinamica di una struttura multipiano è necessario risolvere il sistema che relaziona gli spostamenti di piano con le forze d'inerzia generate dal masse strutturali in movimento.

Per strutture tridimensionali (quindi con più gradi di libertà) esistono più modi elementari di vibrare rappresentati da un vettore di spostamenti normalizzato (autovettore) e da una pulsazione ω (autovalore) che definisce il periodo di oscillazione : $T = 2\pi/\omega$

La procedura

1) determinazione della Massa sismica (G) di ogni impalcato
2) determinazione del baricentro della massa sismica di ogni impalcato (xg,yg) rispetto il sistema di riferimento assoluto.
3) determinazione del raggio d'inerzia polare di ogni impalcato rispetto l'origine del sistema di riferimento. (ro)

Calcolo della matrice di massa degli impalcati :

per ogni impalcato : $\begin{bmatrix} G & 0 & ygG \\ 0 & G & -xgG \\ ygG & -xgG & ro^2G \end{bmatrix}$

Calcolo della matrice di massa globale (M)

Calcolo della matrice di rigidezza delle aste :

Calcolo della matrice di rigidezza globale (K)

Soluzione del sistema : $(K-\lambda M)=0$ (Metodo adottato : Stodola-Vianello)
con determinazione degli autovalori ($\lambda=\omega^2$) e autovettori(spostamenti modali normalizzati)

per ogni modo :
determinazione del periodo modale : $T = 2\pi/\omega$
determinazione della risposta Sismica : Sd(T) - SLV
determinazione della massa partecipante in dir. X e Y
determinazione delle forze sismiche di piano

applicazione delle forze sismiche modali al modello tridimensionale :
determinazione degli spostamenti SLV
determinazione delle sollecitazioni SLV

determinazione della risposta Sismica : Sd(T) - SLD
determinazione degli spostamenti SLD

Calcolo dei coeff. di correzione modale per combinazione CQC
calcolo dell'inviluppo delle sollecitazioni modali in dir. X e Y
calcolo dell'inviluppo degli spostamenti modali in dir. X e Y

3) Instabilità

L'instabilità sismica è valutata mediante il fattore θ che esprime, per ogni piano, il rapporto tra il Momento di secondo e primo ordine.

$$\theta = \frac{Pdr}{Vh}$$

con : P = Σ(j=i-n) Wj somma del peso delle masse sismiche sopra il piano

dr = spostamento relativo del baricentro delle masse del piano

V = Σ(j=i-n) Fj somma delle forze orizzontali sopra il piano

h = h(i) – h(i-1) altezza di piano

Nell'analisi modale i valori dr e F si ottengono dalla combinazione CQC dei valori dei modi considerati.

3) Rigidezza Torsionale

La rigidezza Torsionale, per ogni piano, è valutata dal confronto tra il raggio di rigidezza torsionale (rx,ry) e il raggio polare di massa (ls) secondo la limitazione :

$$rx,ry > 0,8\ ls$$

il raggio di rigidezza torsionale si ottiene, per ogni piano, come rapporto tra la rigidezza torsionale e la rigidezza flessionale.

Rigidezza Flessionale : $Kx = \Sigma\,(3\ E\ Jy / h^3)$

$Ky = \Sigma\,(3\ E\ Jx / h^3)$

Rigidezza Torsionale : $kT = \Sigma\,(Kx\ y^2) + \Sigma\,(Ky\ x^2)$

(x,y) = posizione dell'elemento rispetto il baricentro delle rigidezze di piano

$$rx = \sqrt{\frac{Kt}{Ky}}$$

$$ry = \sqrt{\frac{Kt}{Kx}}$$

il raggio polare di massa è espresso da :

$$ls = \sqrt{\frac{\Sigma\, m_i d_i^{\,2}}{\Sigma\, m_i}}$$

con : d = distanza dal baricentro delle masse

Bibliografia di riferimento :

Odone Belluzzi : Scienza delle Costruzioni - volume I
Michele Capurso : Introduzione al Calcolo automatico delle strutture.
Michele Capurso : Edifici soggetti a forze orizzontali : Calcolo automatico

Hatter D.J. : Matrix Computer Methods of Vibration Analysis